X Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

ETAP KORESPONDENCYJNY, GIMNAZJUM

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1

Która z liczb jest większa
$$\frac{2^{2017}+1}{2^{2018}+1} \quad \text{czy} \quad \frac{2^{2018}+1}{2^{2019}+1} \quad ?$$
Odpowiedź uzasadnij.

Sposób I

Pokażemy, że
$$\frac{2^{2017}+1}{2^{2018}+1} > \frac{2^{2018}+1}{2^{2019}+1}.$$
Mnożąc przez wspólny (dodatni) mianownik, otrzymujemy równoważną nierówność
$$(2^{2017}+1)(2^{2019}+1) > (2^{2018}+1)^2. \tag{1}$$
Mamy $(2^{2017}+1)(2^{2019}+1) = 2^{4036}+2^{2017}+2^{2019}+1$ oraz $(2^{2018}+1)^2 = 2^{4036}+2\cdot 2^{2018}+1 = 2^{4036}+2^{2019}+1$. Zatem nierówność (1) jest prawdziwa.

Sposób 2

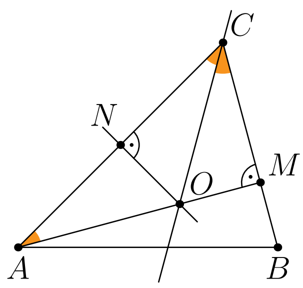
Zauważmy, że
$$\frac{2^{2017}+1}{2^{2018}+1} = \frac{\frac{1}{2}(2^{2018}+1)+\frac{1}{2}}{2^{2018}+1} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2^{2018}+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2^{2018}+1)}.$$
Podobnie
$$\frac{2^{2018}+1}{2^{2019}+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2^{2019}+1)}.$$
Oczywiście $2(2^{2018}+1) < 2(2^{2019}+1)$, stąd
$$\frac{1}{2(2^{2018}+1)} > \frac{1}{2(2^{2019}+1)}$$
a więc
$$\frac{2^{2017}+1}{2^{2018}+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2^{2018}+1)} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2^{2019}+1)} = \frac{2^{2018}+1}{2^{2019}+1}.$$

Zadanie 2

W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta C, symetralna odcinka AC i wysokość opuszczona na bok CB przecinają się w jednym punkcie. Oblicz miarę kąta BCA.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez N środek boku AC, zaś przez O punkt przecięcia dwusiecznej, symetralnej i wysokości. Oznaczmy przez M rzut A na BC. Oznaczmy $\alpha := \sphericalangle ACO = \sphericalangle BCO$.
Skoro $AN = CN$, to trójkąty CNO oraz ANO są przystające na mocy cechy bok-kąt-bok, więc trójkąt AOC jest równoramienny. Zatem $\sphericalangle OAC = \alpha$. W trójkącie AMC suma kątów wynosi $3\alpha + 90^\circ$, zatem $3\alpha = 90^\circ$, więc $\sphericalangle BCA = 2\alpha = 60^\circ$.



Zadanie 3

Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p dla których liczby $p+6$, $p+12$, $p+14$ i $p+18$ są również pierwsze.

Rozwiązanie.

Załóżmy, że p spełnia warunek z zadania. Liczby p, $p+6$, $p+12$, $p+18$, $p+14$ dają takie same reszty z dzielenia przez 5 jak liczby p, $p+1$, $p+2$, $p+3$, $p+4$. Liczby p, $p+1$, $p+2$, $p+3$, $p+4$ są pięcioma kolejnymi liczbami całkowitymi, więc jest wśród nich liczba podzielna przez 5. Zatem i wśród liczb p, $p+6$, $p+12$, $p+18$, $p+14$ jest liczba podzielna przez 5. Ale wszystkie te liczby są pierwsze, zatem jest wśród nich liczba *równa* 5. Oczywiście $p+6, p+12, p+14, p+18 > 5$, więc to znaczy, że $p = 5$ jest jedyną liczbą pierwszą, która może spełniać warunki zadania.

W przypadku $p = 5$ mamy $p+6 = 11$, $p+12 = 17$, $p+14 = 19$, $p+18 = 23$ i te liczby są zaiste pierwsze. Zatem $p = 5$ jest jedyną liczbą pierwszą spełniającą warunki zadania.

Zadanie 4

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2 oraz y_1, y_2 zachodzi nierówność:

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2} \geqslant \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}.$$

Sposób I

Obie strony nierówności są nieujemne, więc podnieść je do kwadratu i otrzymać *równoważną* nierówność

$$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} \geqslant (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2 = x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+y_1^2+2y_1y_2+y_2^2.$$

Odejmujemy od obu stron $x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2$ i dzielimy przez 2, otrzymując

$$\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \geqslant x_1x_2+y_1y_2.$$

Pokażemy nieco mocniejszą nierówność

$$\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \geqslant |x_1x_2+y_1y_2|.$$

Obie strony są dodatnie, więc po podniesieniu do kwadratu uzyskujemy równoważną nierówność

$$x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2 = (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) \geqslant (x_1x_2+y_1y_2)^2 = x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+2x_1x_2y_1y_2.$$

Przenosimy wyrazy z prawej strony na lewą i otrzymujemy

$$x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2-2x_1x_2y_1y_2 \geqslant 0.$$

Ale $x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2-2x_1x_2y_1y_2 = (x_1y_2-y_1x_2)^2$. Tak więc ostatnia nierówność jest prawdziwa, więc wszystkie poprzednie również były prawdziwe.

Sposób II

Niech $A = (0,0)$, $B = (x_1, y_1)$, $C = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ są punktami na płaszczyźnie. Wtedy $\sqrt{x_1^2+y_1^2} = |AB|$ oraz

$$\sqrt{x_2^2+y_2^2} = \sqrt{(x_1+x_2-x_1)^2+(y_1+y_2-y_1)^2} = |BC|$$

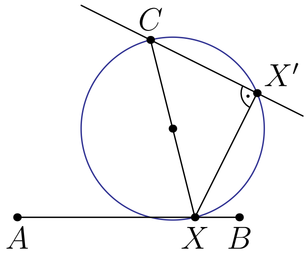
i również $\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} = |AC|$. Nierówność z zadania można przepisać jako $|AB|+|BC| \geqslant |AC|$, co jest znaną nierównością trójkąta.

Uwaga: to rozwiązanie, choć akceptowane, jest nieco niepokojące — właściwie nierówności trójkąta dowodzi się *pokazując powyższą nierówność.*

Zadanie 5

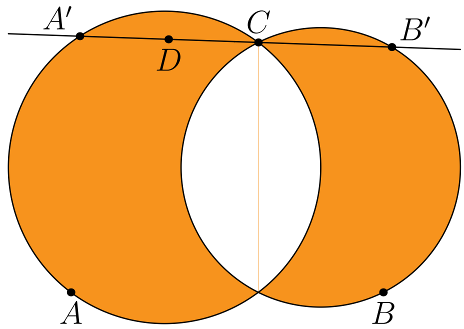
Na płaszczyźnie dany jest odcinek AB i punkt C, leżący poza tym odcinkiem. Wyznacz zbiór rzutów prostopadłych punktów odcinka AB na wszystkie proste przechodzące przez C.

Rozwiązanie.
Niech X będzie ustalonym punktem odcinka AB. Poprowadźmy dowolną prostą przechodzącą przez C i niech X' będzie rzutem X na tę prostą. Wtedy kąt $XX'C$ jest prosty, więc X' leży na okręgu o średnicy CX. Z drugiej strony, niech punkt Y leży na okręgu o średnicy CX. Wtedy CYX jest prosty, więc Y jest rzutem X na prostą CY (przypadek $C = Y$ trzeba rozważyć osobno). Zatem *zbiór rzutów punktu X na proste przechodzące przez C to dokładnie okrąg o średnicy CX.*



Rzut odcinka AB na prostą składa się z rzutów punktów X odcinka AB. Zatem *zbiór rzutów prostopadłych odcinka AB na wszystkie proste przechodzące przez C to zbiór wszystkich okręgów o średnicach CX, gdzie X przebiega punkty odcinka AB.* Ta odpowiedź, aczkolwiek poprawna, nie mówi wiele o tym, *jak* wygląda ten zbiór.

Ustalmy prostą przechodzącą przez C. Niech A', B' będą rzutami punktów A i B na tę prostą. Niech o_A będzie okręgiem o średnicy AC, zaś o_B będzie okręgiem o średnicy BC. Wtedy A' leży na o_A, zaś B' leży na o_B. Odcinek $A'C$ zawiera się w *kole* o_A i leży poza kołem o_B, zaś $B'C$ zawiera się w *kole* o_B i leży poza kołem o_A. To dowodzi, że zbiór z zadania zawiera się w pomarańczowej figurze będącej sumą wnętrz kół (wraz z brzegiem).
Pokażemy, że zbiór z zadania jest równy tej figurze. Załóżmy, że pewien punkt $D \neq C$ leży w figurze. Wtedy D leży w jednym z okręgów, załóżmy, że leży on w o_A. Poprowadźmy prostą CD i oznaczmy przez A', B' jej punkty przecięcia z okręgami o_A i o_B. Odcinek $A'C$ jest przecięciem prostej $A'C$ z kołem o_A. Zatem D leży na $A'C$. Tym samym D leży na odcinku $A'B'$, zatem jest on rzutem pewnego punktu odcinka AB na prostą CD.



Zadanie 6
Na internetowy konkurs matematyczny przygotowano 12 zadań i ułożono z nich różne zestawy: każdy zawierający pewne 7 z 12 zadań. W konkursie wystartowało 700 uczestników i każdy z nich dostał jeden z zestawów. Uzasadnij, że każde z dwunastu zadań pojawiło się u ponad połowy uczestników.

Rozwiązanie.
Wybierzmy jedno z zadań i nazwijmy je Ω. Z pozostałych 11 zadań można ułożyć $\binom{11}{7} = \frac{11!}{4!7!} = 330$ różnych zestawów. Zatem co najmniej 370 uczestników otrzymało zestaw zawierający zadanie Ω.

Krótkie uzasadnienie wzoru na liczbę zestawów: chcemy ułożyć zestaw 7 zadań spośród 11. Pierwsze zadanie tego zestawu wybieramy na 11 sposobów, drugie zadanie na 10 itd. aż siódme zadanie wybieramy na $11-6=5$ sposobów. Łącznie daje to $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 5$ sposobów. Każdy ciąg *siedmiu zadań wybraliśmy w tej procedurze dokładnie raz. Każdy* zbiór *siedmiu zadań wybraliśmy w tej procedurze $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1$ razy, zatem liczba zbiorów to $\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 330.$*

[jj, pg]