



X Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - klasy drugie

28 kwietnia 2018 r.

1. Niech ABC będzie trójkątem wpisanym w okrąg o środku w punkcie O . Niech dwusieczna kąta BAC przecina ten okrąg w punkcie D ($D \neq A$). Podaj warunek konieczny i wystarczający na to, by czworokąt $OBDC$ był rombem.
2. Niech $f(n)$ będzie liczbą sposobów, na które można ustawić liczby $\{1, 2, \dots, n\}$ w ciąg a_1, a_2, \dots, a_n tak, by $a_i + i$ było podzielne przez 4 dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$. Oblicz $f(2018)$ oraz $f(2019)$.
3. Dany jest czworokąt wypukły o polu S . Udowodnij, że suma pól kwadratów zbudowanych na bokach tego czworokąta jest większa lub równa $4S$. Kiedy zachodzi równość?
4. Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, z spełniające równanie

$$x^2 + y^2 = z^k.$$

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy zamieszczać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie konkurs.wi.pb.edu.pl do 6 maja 2018 r..
6. Zakończenie konkursu odbędzie się dnia 10 maja 2018 r.