



## X Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

### Zadania konkursowe - gimnazjum

28 kwietnia 2018 r.

1. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich  $x, y$  spełniających warunki:  $x$  daje resztę z dzielenia przez  $y$  równą 1,  $y$  daje resztę z dzielenia przez  $x$  równą 2.

2. Niech  $a, b, c$  będą długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, że

$$\sqrt{3(ab + bc + ac)} \leq a + b + c < 2\sqrt{ab + bc + ac}.$$

3. Niech  $ABC$  będzie trójkątem wpisanym w okrąg. Niech dwusieczna kąta  $BAC$  przecina ten okrąg w punkcie  $D$ , różnym od  $A$ . Niech  $I$  będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$ . Pokaż, że jeśli czworokąt  $IBDC$  jest rombem, to trójkąt  $ABC$  jest równoboczny.

4. Wyznacz wszystkie piątki liczb dodatnich  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  spełniające układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - \frac{1}{x_1 x_2} = x_3 \\ x_2 + x_3 - \frac{1}{x_2 x_3} = x_4 \\ x_3 + x_4 - \frac{1}{x_3 x_4} = x_5 \\ x_4 + x_5 - \frac{1}{x_4 x_5} = x_1 \\ x_5 + x_1 - \frac{1}{x_5 x_1} = x_2 \end{cases}$$

#### Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy zamieszczać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie [konkurs.wi.pb.edu.pl](http://konkurs.wi.pb.edu.pl) do 6 maja 2018 r..
6. Zakończenie konkursu odbędzie się dnia 10 maja 2018 r.